El Método Genético en la Didáctica de las Matemáticas

The Genetic Method in the Teaching of Mathematics

Recibido el 16 de marzo de 2018, aceptado el 21 de mayo de 2018

No. de clasificación JEL: C02; I21; I23

Horst R. Beyer
Instituto de Matemáticas-UNAM y el MCTP-UNACH
horstbeyer@gmail.com

Maricela Beyer
Proyecto "Matemáticas para todos"
maricelha@yahoo.com

Resumen

En este artículo se explica el por qué surge el método genético, su significado y su aplicación en la didáctica de las matemáticas. Este método fue desarrollado en Alemania en 1926 por Otto Toeplitz; matemático investigador y profesor de la Universidad de Bonn, Alemania. El uso la palabra *"genetische methode"* del alemán, se traduce como método genético, donde la palabra "genético" se refiere a la génesis de los conceptos matemáticos**.** No solo Toeplitz refirió esta metodología para la enseñanza de las matemáticas, que involucra la parte viva y activa de estas. Clairaut (1750) escribió: "aunque la Geometría es abstracta en sí misma, deben estar de acuerdo que las dificultades sufridas por los principiantes en el estudio de las matemáticas, provienen principalmente de la forma en que éstas se enseñan. En los tratados de matemáticas habituales, se comienzan con una gran cantidad de definiciones, preguntas, axiomas y principios preliminares, que solo parecen prometer cuestiones secas para los lectores…, Cuando me di cuenta de este hecho, me propuse investigar cómo nació la geometría y traté de explicar los principios matemáticos con los métodos más naturales, los métodos que fueron adoptados por los primeros inventores". Este método resulta prometedor para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en los países latinoamericanos.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, método genético

Abstract

This article explains why the genetic method arises, its meaning and its application in the teaching of mathematics. This method was developed in Germany in 1926 by Otto Toeplitz, a mathematician researcher and professor at the University of Bonn, Germany. The German word "genetische methode" is translated as "genetic method," in which the word "genetic" refers to the genesis of mathematical concepts. Toeplitz was not the only one to use this methodology for the teaching of mathematics, which involves its lively and active areas. Clairaut (1750) wrote: "Although geometry be in itself abstract, it must be admitted that the difficulties felt by those who commence its study most frequently arise from the manner in which it is taught in ordinary elementary works. They generally begin with a great number of definitions, postulates, axioms, and preliminary principles, which seem to promise nothing but dryness to the reader. With this idea before me I have resolved to go back to that which may have given birth to Geometry, and I have endeavoured to develop its principles by a method such as may naturally be supposed to be that of its first inventors…" This method is promising for the improvement of teaching and learning of mathematics in Latin American countries.

Keywords: *didactic, mathematics, genetic method*

1. Antecedentes

Estudiando las necesidades en las aulas, específicamente, en los cursos de Matemáticas, actualmente se han encontrado las siguientes problemáticas:

1. Libros de texto, que en su mayoría contienen puntos de vista del siglo XVIII.
2. Las matemáticas modernas son matemáticas cada vez más abstractas por lo que los estudiantes deberán tener habilidades tanto en hacer abstracciones matemáticas como saber dónde aplicarlas.
3. El porcentaje de alumnos reprobados en matemáticas en cualquier nivel de estudios desde Educación Básica hasta Educación Superior es alarmante.

4. La manera en que se ha venido dando los cursos de matemáticas en general, no proveen las bases para cursos más avanzados, así como en el área de Análisis Matemático (Demostración de teoremas).

La pregunta sería: ¿Cómo lograr que los estudiantes se sientan motivados a estudiar las matemáticas? Un método que ha mostrado gran eficacia en el aprendizaje de las matemáticas, es el desarrollado por Otto Toeplitz (Figura 1) que usa la historia de las matemáticas, "el papel de la historia es proporcionar el material para desarrollar la intuición".

Figura 1. Fotografía de Otto Toeplitz en la universidad de Bonn, Alemania

Fuente: Beyer (2014)

El término "método genético" (en la enseñanza de las matemáticas) fue acuñado en 1927 por Toeplitz en su libro, *"Das Problem der Universitaetsvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren Schulen",* "El problema en la enseñanza del cálculo en las universidades y bachilleratos, así como las limitaciones frente a cursos más avanzados que el cálculo" (Toeplitz, 1927).

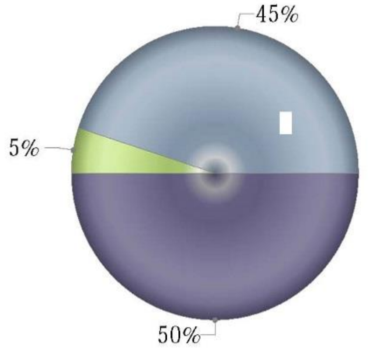
Toeplitz fue un matemático-investigador bien conocido, con importantes contribuciones en el campo del análisis funcional. La razón por la que desarrolló el método fue la decepción en la enseñanza en las universidades

Staobil lekilal ta lekil abtel. Administración para el desarrollo. No. 14. Enero-junio 2018, pp. 43-58. ISSN 2007-2910

alemanas que en ese momento utilizaban un enfoque axiomático riguroso basado en la construcción del sistema de números reales y sin motivación de los conceptos abstractos. Según Toeplitz (1927, pp. 88-100), con:

> Ese sistema educativo, sólo el 5% de los alumnos puede aprobar con buenas calificaciones los cursos pero hay un alrededor del 45% de buenos estudiantes que fallarían los cursos sólo por falta de motivación, además ese 5% de alumnos van a ser más tarde matemáticos profesionales.

Figura 2: Aprovechamiento escolar según Otto Toeplitz en la Universidad de Bonn en 1926



5%= estudiantes aprobados con buenas calificaciones

45%= buenos estudiantes con calificaciones no aprobatorias

50%= estudiantes no aprobados

Fuente: Elaboración propia

Durante 19 años de experiencia en universidades alemanas, Toeplitz desarrolló y probó el método genético con el fin de rescatar el 45% de buenos estudiantes, él razonó como sigue:

> El desarrollo de los conceptos matemáticos establecidos ahora ha sido un proceso histórico multicultural, difícil y emocionante en su tiempo, por lo tanto, una enseñanza que refleje este entusiasmo traerá vida a estos conceptos y serán interesantes para la mayoría de los estudiantes (Toeplitz, 1949).

Esta es la esencia del método genético, propuso utilizar la historia de las matemáticas con el propósito de motivación. Toeplitz distingue dos variantes del método genético. Un método directo que muestra el drama completo de la evolución de los conceptos matemáticos, incluyendo confusiones y la noción de un método indirecto genético, que consiste en un diagnóstico y resolución de los problemas relacionados con el desarrollo de los conceptos matemáticos mediante un análisis histórico.

Es de destacar que en el año 1962, una situación similar se presentó en la enseñanza de las matemáticas en los Estados Unidos de América. Poco después de la crisis del Sputnik y la amenaza intelectual de los ingenieros soviéticos era primordial preparar a los estudiantes para las matemáticas avanzadas, el plan de estudios pasó a centrarse en la abstracción y el rigor. Una de las respuestas más razonables a las "nuevas Matemáticas" fue una declaración colectiva de Lipman Bers, Kline Morris, George Polya, y Max Schiffer, firmada por 61 miembros y se publicó en "*The Mathematics Teacher"* y en la revista "*The American Mathematical Monthly"* en 1962. En esta carta, los firmantes llaman al uso del "método genético" en la enseñanza de las matemáticas. "Esto podría sugerir un principio general: la mejor manera de guiar el desarrollo mental del individuo es hacerle repetir el desarrollo mental de sus ancestros, por supuesto, y no los miles de errores en detalle" (Memorandum, 1962, pp. 189-193).

Asimismo, en USA, en la década de 1980, los departamentos de matemáticas se enfrentaron a las críticas de los otros departamentos, especialmente en los departamentos de ingeniería, muchos de sus estudiantes no tenían idea de cómo aplicar sus conceptos en otras áreas diferentes a las "matemáticas puras".

En nuestra experiencia, los problemas descritos en la enseñanza de las matemáticas no sólo se aplican a Alemania y Estados Unidos, sino a nivel mundial. El único remedio que se ve prometedor para esta situación es el uso del método genético en una de sus formas para la motivación de los estudiantes.

2. Otra forma de entender a la educación

> *"Los padres y maestros tenemos la responsabilidad de criar hijos que transformen nuestro país, en uno donde reine la libertad, la abundancia, la justicia y sobre todo la felicidad".* (La Jornada, 2012)

Las nuevas generaciones están cargadas de mentes inteligentes y a su vez con grandes necesidades educativas para enfrentar los retos de un mundo cada vez más globalizado. Hoy en día los aprendices de matemáticas tienen que lidiar con conceptos de "carácter abstracto" por lo que se requiere una gran atención. Para captar la atención de los alumnos, los profesores tienen que competir con muchas distracciones como la televisión, películas, videojuegos, etc. En los salones de clase los estudiantes interesados en las matemáticas son inquisitivos, curiosos y dispuestos a aprender. El interés de los estudiantes en el tema es crucial para el éxito de sus estudios y tendrán éxito bajo cualquier situación.

En estas circunstancias es necesario que trabajemos conjuntamente, maestros, alumnos y padres de familia en la educación de nuestra sociedad.El docente de matemáticas no necesita ser un experto en matemáticas avanzadas, lo único que se le requiere es fomentar en los alumnos el gusto por aprender a pensar por sí mismos, invitar a los alumnos/hijos a buscar y encontrar la verdad, saber reconocer lo que está bien y lo que no.

Matemáticos importantes como Klein (1895), Poincaré (1899) y Kowalewski (1909), entre otros, preocupados en la educación matemática, propusieron el uso de la historia de las matemáticas para despertar en los alumnos el gusto por aprenderlas. Gerhard Kowaleski en 1909 escribió en su libro Die Klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen, Los Problemas clásicos del Análisis del Infinito:

> A menudo, los libros de matemáticas que solamente consisten en una colección de problemas repelen a los estudiantes, lo mismo sucede con aquellos libros llenos de teoremas y demostraciones.
>
> Pero hay una manera de hacer las cosas más aceptables para los jóvenes principiantes. Siempre que sea posible y con buen éxito, he usado un método en mis clases de matemáticas.
>
> El método consiste en revivir los momentos histórico-personales del concepto en cuestión. De esta manera se revive el interés del alumno. Si le digo a los estudiantes: *Leibniz construyó la curva logarítmica así* o digamos ésta es otra manera que utilizó Leibniz para integrar las funciones racionales, etc.
>
> Hay una gran diferencia entre una simple presentación y nuestra relación personal con los conceptos matemáticos:
>
> Mi objetivo es que los estudiantes contacten con los principales creadores del mundo matemático que conocemos ahora. *(*Kowalewski, 1909)

En el salón de clases es notorio cómo los estudiantes enfocan toda su atención cada vez que se hace mención de un hecho histórico por lo que es menester estudiar las matemáticas a través del conocimiento de la propia historia, la historia de las matemáticas va aparejada con la historia del ser humano.

3. Las Matemáticas

Las matemáticas están presentes en los primeros registros históricos de la llamada cuna de la civilización, hace más de 4,000 años. Las matemáticas han tenido una vida tan excitante como la del ser humano con un *corpus* viajero sin fronteras, sin limitaciones culturales o religiosas, de esta manera han obtenido la forma actual.

El propósito de mirar hacia el desarrollo de las matemáticas es motivar a nuestra *psique* a buscar que hay más allá de sumar nuestros salarios y restar nuestros gastos. Diariamente calculamos distancias y tiempos ¿es entonces el ser humano un ser matemático que vive en una cuarta dimensión tiempo-espacio? Durante miles de años el estudio de las matemáticas fue secreto, exclusivo para sacerdotes y reyes, ahora, es el tiempo de reconocerlas pues las matemáticas son para todos.

Los seres humanos, conscientes o no de ello, somos matemáticos, tenemos que hacer ciertos cálculos matemáticos para determinar distancias, tiempos, posiciones, sumas, divisiones, etc.

Basándonos en la lógica matemática podremos observar que incluso las soluciones a problemas de la vida cotidiana se vuelven más ligeras, si aprendemos el lenguaje lógico en que las matemáticas están escritas, veremos que son más fáciles de lo que pensamos, lo único que necesitamos es: motivación.

4. Metodología

a. La motivación como herramienta

La motivación en general es un estado interno que actúa, dirige y mantiene la conducta. En matemáticas la motivación se relaciona más a entender los motivos por los que se estudia un tema. La importancia del estudio de estas es 'obvio'; sin embargo, la realidad nos muestra que al llegar a cierta edad muchos alumnos las encuentran abstractas y difíciles.

Entonces, ¿Cómo funciona la motivación que propone Toeplitz y otros? La motivación proviene del uso de aplicaciones y de darle un sentido más humano a la enseñanza de los conceptos matemáticos. Primeramente hacerle notar a los alumnos que las matemáticas son una estructura construida por el ser humano a lo largo de más de 4,000 años, que los conceptos han tenido un origen y una razón de existir, que la mayoría de las matemáticas de la antigüedad nacieron por sus aplicaciones en la construcción de sus monumentales edificios, en el comercio forzoso con otras comunidades y en la administración de las civilizaciones nacientes en Mesopotamia y el antiguo Egipto.

Una nota importante para el uso de este método es que, el uso de la historia de las matemáticas, es solo con el propósito de captar la atención de los alumnos, en general la motivación debería ser tomada de las aplicaciones en la administración, en la ingeniería y en la física.

Staobil lekilal ta lekil abtel. Administración para el desarrollo. No. 14. Enero-junio 2018, pp. 43-58. ISSN 2007-2910

Aquí llegamos a dar a conocer que el uso del método genético trae un regalo extra muy valorado por los europeos: el amor a la educación.

5. Método Genético

El método que sugerimos para estos tiempos y en situaciones como las que actualmente enfrenta México, es el método genético indirecto, que usa la historia de las matemáticas enfocándose en la solución de los problemas relacionados con el desarrollo de las matemáticas desde su génesis y su transformación a su paso por la historia de la humanidad (Beyer, Ruíz y Beyer, 2014). Con notación y lenguajes modernos, claro está.

Los orígenes de las matemáticas tienen como testigos a las grandiosas Pirámides de Egipto y los monumentos de Ishtar. La historia nos muestra que las matemáticas se han ido construyendo capa por capa por diferentes culturas, razas, religiones, como un "trabajo mundial comunitario". ¿Cómo es posible esto? Si el ser humano no se muestra muy caritativo, pero la realidad es que por generaciones el conocimiento se va construyendo capa por capa en este sentido, la mayoría de las ideas están basadas en los conocimientos previos (evolución). La forma de las matemáticas actuales es un producto de un trabajo comunitario, donde la cultura, religión, raza, idioma, se unifican. ¡Vaya que sí! Una de las razones por las que se les llama el lenguaje universal.

Figura 3: Pirámide en Giza, Egipto

Fuente: Beyer (2014)

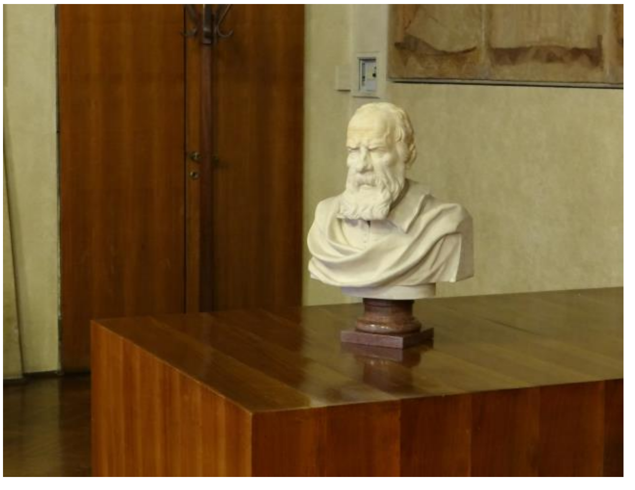
A través de ecuaciones y números es posible describir desde el movimiento de los átomos hasta la formación de galaxias, gracias a las matemáticas es posible el *internet* y muchas de las comodidades de las que gozamos ahora. Galileo Galilei en la Italia del Renacimiento escribió:

> ... io dico l'universo, ma non si puo intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali ´e scritto. Egli ´e scritto in lingua matematica, e i caratteri sontriangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi ´e impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi ´e un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. (Galilei, 1623)

En español:

> ...Lo que digo es que el Universo no puede ser entendido si no se entiende el lenguaje en que éste está escrito, el Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas. Los triángulos, círculos y otras figuras geométricas son los caracteres en que el Universo se da a entender, sin las matemáticas es humanamente imposible entenderle una sola, sin las matemáticas estaríamos vagando en un laberinto obscuro. (Galilei, 1623)

Figura 4: Gaileo Galilei, en la Universidad de Padua, Italia



Fuente: Beyer (2016)

a. Reseña corta del desarrollo histórico de las Matemáticas

Orígenes y desarrollo del razonamiento Aritmético, Geométrico y Algebraico.

1. a) Sistema numérico egipcio.

   b) Ejemplos matemáticos de los papiros egipcios como el papiro de Rhind y de Moscú.

2. a) Sistema numérico en Babilonia.

   b) Soluciones de problemas matemáticos de las tablillas de la antigua Babilonia.

3. Matemáticas de la Antigua Cultura Maya.

4. Grecia: desde Tales a Euclides: Teorema fundamental de la Aritmética.
5. Grecia: de Arquímedes a Hipatia. Principios básicos de la Geometría.
6. Origen de la Trigonometría, la función seno.
7. a) Origen de la función coseno y las matemáticas de la India.

   b) Uso del cero y el sistema decimal.
8. Matemáticas y aportaciones de la antigua China.
9. Nacimiento del Algebra y la solución a ecuaciones cuadráticas en el antiguo Imperio árabe-islámico.
10. a) Reglas del manejo de exponentes.

    b) Sucesión de Fibonacci.

    c) Algebristas Italianos (solución de ecuaciones de tercer orden).

    d) Teorema fundamental del álgebra.
11. Napier y los logaritmos naturales.
12. Galileo y las matemáticas de objetos en movimiento.
13. Fermat, Descartes y Geometría Analítica.
14. Newton y el modelo del Universo.
15. a) Leibniz y el Nacimiento del "Cálculo".
    b) Teorema Fundamental del Cálculo.
16. Euler "Prueba su promesa".
17. Gauss, la invención de la Geometría Diferencial.

6. Ejemplo del uso del Método Genético en el tema de límites para una sucesión

Para encontrar el límite de una sucesión en los números reales utilizaremos el trabajo de Arquímedes ($\sim$ 200 años A.C); él buscaba encontrar el perímetro p_c de una circunferencia de radio unitario: $r = 1$. Para esto, utilizó una secuencia de polígonos regulares inscritos (en el interior de la circunferencia). Para empezar aproximó el perímetro de una circunferencia unitaria con el perímetro de un polígono regular de seis lados (hexágono).

Con notación moderna tenemos que:

$$p_c = 2\pi r \text{ , como } \quad r=1 \text{ , } p_c = 2\pi \text{ .}$$

Donde:

p_c = perímetro de la circunferencia

r = radio de la circunferencia, en este caso $r = 1$

π = valor no conocido por Arquímedes

Los hexágonos tienen la característica que la longitud de cada uno de los lados (l_6) es igual al radio de la circunferencia donde está inscrito. Por lo tanto:

$$l_6 = r = 1\,,$$

l_6 es la longitud de uno de los lados del hexágono, por tanto el perímetro p_6 del hexágono está dado por:

$$p_6 = 6 \cdot l_6 = 6\,,$$

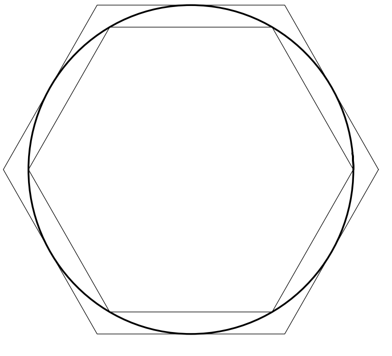
Aproximando el perímetro de la circunferencia p_c al perímetro del hexágono p_6:

$$p_c \approx p_6\,,$$

tenemos:

$$p_c = 2\pi\,, \text{ por lo tanto } 2\pi \approx 6\,, \qquad \pi \approx 3\,.$$

Figura 5: Hexágonos inscritos y circunscritos en una circunferencia de radio 1

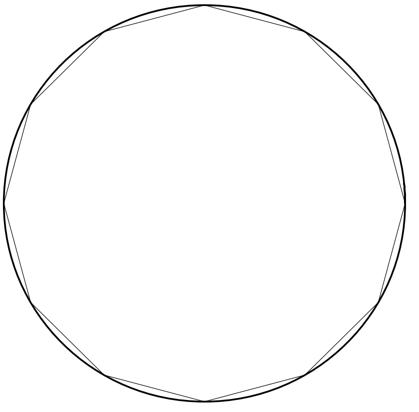


Fuente: elaboración propia

Como se observa Arquímedes obtiene una primer aproximación para π es $\pi \approx 3$.

Duplicando el número de lados n, secuencialmente, Arquímedes utilizó polígonos regulares de 12, 24, 48 y 96 lados.

Figura 6: Dodecágono inscrito en una circunferencia



Fuente: elaboración propia

El perímetro de un polígono regular p_n está dado por:

$p_n = n \cdot l_n$.

Donde:

p_n = perímetro del polígono de n lados inscrito en la circunferencia,

l_n = longitud de uno de los lados del polígono regular de n lados,

n = número de lados del polígono regular inscrito en la circunferencia.

Para conocer la longitud l_{2n} de cada uno de los lados de polígonos con $2n$ número de lados, Arquímedes desarrolló el siguiente algoritmo:

$$l_{2n}^2 = \frac{l_n^2}{2 + \sqrt{4 - l_n^2}},$$

A continuación tenemos la primer iteración para calcular la longitud de uno de los lados del polígono con $2n$ = 12 lados, (dodecágono), que aparece en la figura anterior.

$$l_{12}^2 = \frac{l_6^2}{2 + \sqrt{4 - l_6^2}} = 2 - \sqrt{3} .$$

Por lo tanto, el perímetro del dodecágono p_{12} es:

$$p_{12} = 12 \cdot l_{12} = 6.21,$$

aproximando el perímetro de la circunferencia p_c al perímetro del dodecágono $p12$

$pc \approx p12$,

tenemos:

$p_c = 2\pi$, por lo tanto $2\pi \approx 6.21$, $\pi \approx 3.105$.

Arquímedes repitió este algoritmo hasta llegar a un polígono de 96 lados como se muestra en la figura 7.

$$p_{96} = 96 \cdot l_{96} = 6\,\frac{20}{71} \approx 6.28 \quad ,$$

Donde:

p_{96} = perímetro del polígono de 96 lados inscrito en la circunferencia,

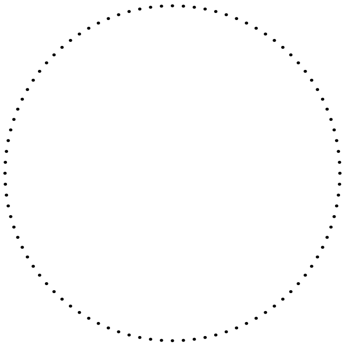
l_{96} = Longitud de uno de los lados del polígono de 96 lados inscrito con n número de lados.

Aproximando p_c al valor de p_{96} tenemos: $p_c \approx 6.28$, por tanto, $2\pi \approx 6.28$, $\pi \approx 3.14$. Ahora sabemos que π tiene una expansión decimal infinita.

Arquímedes encontró correctamente los 3 primeros dígitos.

Figura 7: Esquinas de un polígono de 96 lados.

A simple vista parece una circunferencia



Fuente: elaboración propia

Como se observa en la Tabla No. 1, Arquímedes se dió cuenta que podría utilizar polígonos de un número arbitrariamente mayor y la sucesión $6l_6$, $12l_{12}$, $24l_{24}$... converge a un número que ahora conocemos como 2π, una aproximación arbitrariamente precisa. Cabe mencionar que se han utilizado el lenguaje y la notación modernas, que Arquímedes no contaba con el aparato matemático que se utiliza hoy en día.

Tabla No. 1: Valores calculados

Número de lados	Perímetro del Polígono	Valor aproximado para π
6	6	3
12	6.21	3.105
24	6.26	3.13
48	6.27	3.135
96	6.28	3.14

Fuente: elaboración propia

Con notación moderna tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot l_n = 2\pi \ .$$

Conclusiones

El uso del Método Genético en la enseñanza de las matemáticas es de gran tradición en Europa. Cabe señalar que dicho método se puede usar tanto en nivel primaria, secundaria, bachillerato y superior.

La UNACH, el CONACyT y la UNAM, en un esfuerzo interinstitucional a través de la plataforma *Massive Online Open Courses* (MOOC), han creado el curso en línea llamado “Matemáticas para todos” donde se provee de herramientas para la didáctica de las matemáticas basándose en el uso del método genético y que puede ser consultado en www.cursos.unach.mx.

Se espera que utilizando la metodología propuesta tanto en la capacitación a los docentes, como en la creación de grupos de estudio y el desarrollo de material didáctico, se puede formar una masa crítica que cambie la forma de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país y a su vez, se elimine la deserción escolar y se repunte el desarrollo de las tecnologías en el país.

Referencias

Beyer, H. R. (2010). *Calculus and Analysis: A Combined Approach*. UK: Wiley.

Beyer, H. R., Ruiz, H. F. y Beyer, M. (2014). *Matemáticas Para Todos: La Historia*. México: Secretaría de Cultura de Michoacán.

Clairaut, M. (1853). *Éléments de Géométrie*. París: Libraririe Classiques de Jules Delain.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education, For the Learning of Mathematics. *Special Issue on History in Mathematics Education,* 11, No. 2.

Furinghetti, F. (1999). The History of Mathematics as a Coupling Link Between Secondary and University Teaching. *International Journal of Mathematical Education*, 31.

Galilei, G. (1623). Rome: Il Saggiatore.

Katz, V.J. (ed) (2000). *Using history to teach mathematics: an international perspective*. New York: HarperCollins.

Klein, F. (1895). *Über Arithmetisierung der Mathematik*. Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Issue 2.

Kowalewski, G. (1909). *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* Leipzig: Wilhelm Engelmann Verlag.

Memorandum from 1962. *On The Mathematics Curriculum Of The High School*. Amer. Math. Month. 69.

Moreno-Armella L. (2014). *An Essential Tension in Mathematics Education*. ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 46.

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement détail. Enseignement mathématique, 1.

Siu, M-K. (1997). *The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom*. in Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society 1:1, 143-154; reprinted in *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (ed. V. Katz).

Toeplitz, O. (1927). *Das Problem der Universitaetsvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren Schulen*, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig: Teubner.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Band I*, Springer, Berlin, English translation by L Lange, 1963, *The calculus: A genetic approach*, Univ. of Chicago Press.

La Jornada, Zacatecas, Miércoles 26 de diciembre de 2012, 11. https://issuu.com/lajornadazacatecas.com.mx/docs/local26122012op.